PHẦN MỞ ĐẦU

Bài toán tìm giới hạn của một dãy cho bởi hệ thức truy hồi là một dạng bài toán khó, đòi hỏi nhiều kĩ thuật. Bài toán này thường xuất hiện trong các đề thi học sinh giỏi cấp tỉnh, đề thi Olympic 30 tháng 4, đề thi quốc gia và quốc tế. Trong quá trình giảng dạy chương trình toán lớp 11 nâng cao và bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi đã tìm tòi đúc kết và rút ra được một số kĩ thuật tìm giới hạn của các bài toán dạng này.

Hiện nay, các tài liệu chuyên sâu về chuyên đề giới hạn của dãy số cũng còn rất hạn chế; với mong muốn nâng cao chất lượng giảng dạy bồi dưỡng học sinh giỏi các cấp, cung cấp cho các em học sinh, đặc biệt là các em học sinh giỏi toán và yêu thích toán có thêm một tài liệu tham khảo về giới hạn của dãy số, và những kĩ thuật để tính giới hạn của các dãy cho bởi hệ thức truy hồi, tôi nghiên cứu và viết đề tài: "***Một số kĩ thuật tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi***".

Xin chân thành cảm ơn!

Quảng Ngãi tháng 05 năm 2011

Người thực hiện đề tài

Huỳnh Đoàn Thuần

PHẦN NỘI DUNG

Trong sách giáo khoa ĐS và GT 11 nâng cao (NXBGD 2007 do Đoàn Quỳnh chủ biên) trang 135, bài tập 7 nguyên văn như sau:

"Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) Chứng minh rằng(CMR) dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân

b) Tính $\lim u_n$"

Qua phân tích và giải quyết bài toán trên, tôi nhận thấy:

- Nếu như đề bài không cho câu a) mà chỉ yêu cầu tìm $\lim u_n$ thì bài toán trở nên rất khó và lạ đối với học sinh. Đây là bài toán tìm giới hạn của một dãy cho bởi hệ thức truy hồi
- Việc đề bài yêu câu thêm câu a) là để có thể xác định công thức tổng quát (CTTQ) của dãy (u_n) nhờ vào việc tìm CTTQ của một cấp số nhân, từ đó áp dụng các định lí về giới hạn để tính $\lim u_n$
- Khai thác bài toán trên, tôi xây dựng thành một kĩ thuật để tính giới hạn của dãy truy hồi đó là: " Kĩ thuật tính giới hạn của dãy truy hồi bằng cách xác định CTTQ của dãy".

Ngoài ra, trong quá trình tìm tòi, nghiên cứu, giảng dạy và bồi dưỡng học sinh giỏi, tôi đã tổng hợp và đúc kết thành một số kĩ thuật để tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi. Trong khuôn khổ của đề tài này, tôi sẽ trình 3 kĩ thuật cơ bản để tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi sau đây:

Kĩ thuật 1: Tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi bằng cách xác định CTTQ của dãy.

Kĩ thuật 2: Tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi bằng cách sử dụng phương pháp đánh giá và nguyên lí kẹp.

Kĩ thuật 3: Tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi bằng cách sử dụng tính đơn điệu và bị chặn của dãy.

I/ Kĩ thuật 1: Tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi bằng cách xác định CTTQ của dãy.

Phương pháp xác định CTTQ của một dãy số cho bởi hệ thức truy hồi khá phong phú và đa dạng, trong phạm vi bài viết này tôi chỉ trình bày kĩ thuật tìm CTTQ của dãy chủ yếu sử dụng phương pháp đổi biến để đưa dãy đã cho về cấp số cộng(CSC) hoặc cấp số nhân(CSN) hoặc tổng hiệu của các cấp số cộng, và cấp số nhân. Quay lại bài tập 7 trang 135 sách giáo khoa ĐS và GT 11 NC

Ví dụ 1: "Cho dãy số (u_n) xác định như sau: $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) CMR dãy số (v_n) xác định bởi $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ là một cấp số nhân

b) Tính $\lim u_n$"

Giải:

a) Ta có (v_n) là CSN $\Leftrightarrow v_{n+1} = q.v_n (= const), q \neq 0, \forall n \geq 1$. Thật vậy, ta có $v_{n+1} = u_{n+1} - \frac{15}{4} = \frac{1}{5}u_n + 3 - \frac{15}{4} = \frac{1}{5}(v_n + \frac{15}{4}) - \frac{3}{4} = \frac{1}{5}v_n$. Nên ($v_n$) là một CSN có công bội $q = \frac{1}{5}$ và $v_1 = \frac{25}{4}$. Do đó $v_n = v_1.q^{n-1} = \frac{25}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1} = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-3}$

b) Từ câu a) suy ra $u_n = v_n + \frac{15}{4} = \frac{1}{4}.\left(\frac{1}{5}\right)^{n-3} + \frac{15}{4}$. Do đó $\lim u_n = \frac{15}{4}$.

Nhận xét:

1/ Vì sao lại nghĩ ra được phép đổi biến $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ để dãy (v_n) là một CSN?

Ta thấy $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + 3$, ta cần tìm số b sao cho $u_{n+1} - b = \frac{1}{5}(u_n - b)$

$\Rightarrow u_{n+1} = b - \frac{1}{5}b + \frac{1}{5}u_n = \frac{1}{5}u_n + 3 \Rightarrow b = \frac{15}{4}$

Do vậy, nếu đặt $v_n = u_n - \frac{15}{4}$ thì $v_{n+1} = \frac{1}{5}v_n, \forall n \geq 1$ nên (v_n) là một CSN

2/ Ngoài ra, có thể đặt $v_n = 5^n.u_n, \forall n \geq 1$, khi đó ta có $v_{n+1} - v_n = 3.5^{n+1}, \forall n \geq 1$.

Suy ra $v_n = \frac{15}{4}(5^n - 1) + 35 \Rightarrow u_n = \frac{v_n}{5^n} = \frac{15}{4}.\frac{5^n - 1}{5^n} + \frac{35}{5^n} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-3} + \frac{15}{4}$

Ví dụ 2: *(Bài 4.37 trang 139 sách bài tập ĐS và GT11 NC NXBGD 2007)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ 2u_{n+1} = u_n + 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Đặt $S_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$, $n \geq 1$.

a) CMR dãy số (v_n) với $v_n = u_n - 1$, $n \geq 1$ là một CSN lùi vô hạn

b) Tính $\lim S_n$

Giải:

a) Ta có $v_{n+1} = u_{n+1} - 1 = \frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2} - 1 = \frac{1}{2}(u_n - 1) = \frac{1}{2}v_n, \forall n \geq 1$

Suy ra dãy số (v_n) là một CSN lùi vô hạn với công bội q = $\frac{1}{2}$. Nên $v_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

b) Từ câu a) suy ra $u_n = v_n + 1 = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + 1, \forall n \geq 1$

Suy ra $S_n = \sum_{k=1}^{n} u_k = \sum_{k=1}^{n} (\frac{1}{2})^{k-2} + n = 4 + n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$.

Vậy $\lim S_n = \lim\left[4 + n - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right] = +\infty$

Nhận xét: Có thể tìm CTTQ của dãy (u_n) bằng phép đổi biến $v_n = 2^n.u_n, \forall n \geq 1$

Ta có $v_{n+1} = 2^{n+1}.u_{n+1} = 2^{n+1}(\frac{1}{2}u_n + \frac{1}{2}) = v_n + 2^n, \forall n \geq 1 \Rightarrow v_{n+1} - v_n = 2^n, \forall n \geq 1$

Do đó $v_n = v_n - v_{n-1} + v_{n-1} - v_{n-2} + ... + v_2 - v_1 + v_1 = 2^{n-1} + 2^{n-2} + ... + 2 + 6$

Hay $v_n = 2(2^{n-1} - 1) + 6 = 2^n + 4 \Rightarrow u_n = 1 + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

Ví dụ 3: *(Bài 4.73 trang 148 sách bài tập ĐS và GT 11NC, NXBGD 2007)*

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n - 4}{u_n + 6}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) CMR $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$

b) CMR dãy (v_n) với $v_n = \dfrac{u_n + 1}{u_n + 4}$ là một CSN. Tính limu_n

Giải:

a) Ta sẽ chứng minh bằng quy nạp $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$.

Khi n = 1 ta có $u_1 = 1 \neq -4$

Giả sử $u_k \neq -4, \forall k \geq 1$, ta chứng minh $u_{k+1} \neq -4$. Thật vậy, giả sử ngược lại $u_{k+1} = -4$, khi đó $\dfrac{u_k - 4}{u_k + 6} = -4 \Rightarrow u_k - 4 = -4u_k - 24 \Rightarrow u_k = -4$, trái với giả thiết quy nạp. Vậy $u_n \neq -4, \forall n \geq 1$

b) Từ câu a) suy ra v_n luôn xác định với mọi $\forall n \geq 1$

Ta có $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1} + 1}{u_{n+1} + 4} = \dfrac{\dfrac{u_n - 4}{u_n + 6} + 1}{\dfrac{u_n - 4}{u_n + 6} + 4} = \dfrac{2(u_n + 1)}{5(u_n + 4)} = \dfrac{2}{5}v_n, \forall n$. Vậy ($v_n$) là 1 CSN lùi vô hạn với công bội q = $\dfrac{2}{5}$. Suy ra $v_n = \left(\dfrac{2}{5}\right)^n$

Nên $u_n = \dfrac{4.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 1}{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n}$. Do đó $\lim u_n = \lim \dfrac{4.\left(\dfrac{2}{5}\right)^n - 1}{1-\left(\dfrac{2}{5}\right)^n} = -1$

Ví dụ 4: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{n(n+1)}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim u_n$

Giải:

Ta có $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{n(n+1)} = \dfrac{1}{n} - \dfrac{1}{n+1} \Rightarrow u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \ldots.. + u_2 - u_1 + u_1$

$$\Rightarrow u_n = \frac{1}{n-1} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n-2} - \frac{1}{n-1} + \ldots\ldots + \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{1}{n}$$

Do đó $\lim u_n = \lim(2 - \dfrac{1}{n}) = 2$

Ví dụ 5: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = u_n + \left(\dfrac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$

Giải: Ta có $u_{n+1} - u_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^n \Rightarrow u_n = u_n - u_{n-1} + u_{n-1} - u_{n-2} + \ldots.. + u_2 - u_1 + u_1$

$$\Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} + \ldots.. + \left(\frac{1}{2}\right)^1 + 1 = \frac{1-(\frac{1}{2})^n}{1-\frac{1}{2}} = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

Do đó $\lim u_n = \lim\left[2 - \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\right] = 2$

Như vậy, nếu xác định được CTTQ của dãy số thì bài toán trở nên quen thuộc và ta có thể tính được giới hạn của dãy đó một cách dễ dàng dựa vào các định lí về giới hạn đã được học trong chương trình của sách giáo khoa. Sau đây là một số bài tập tương tự

*** Bài tập tham khảo:**

1/ Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = -5 \\ u_{n+1} = \dfrac{2}{3}u_n + 6, \forall n \geq 1 \end{cases}$.Tính lim$u_n$

ĐS: limS_n = -18

2/ Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = 4u_n - 1, \forall n \geq 1 \end{cases}$.Tính lim $\frac{u_n}{2^{2n}}$

ĐS: lim $\frac{u_n}{2^{2n}} = \frac{2}{3}$

3/ Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = \underbrace{\sqrt{2 + \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n\,dau\,can}$ .Tính lim $\frac{u_1.u_2....u_n}{2^n}$

(Đề thi HSG cấp tỉnh tỉnh Quảng Ngãi năm 2001 – 2002)

HD: Tìm được CTTQ của dãy (u_n) là $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n$ và lim $\frac{u_1.u_2....u_n}{2^n} = \frac{2}{\pi}$

4/ Cho dãy số (u_n) xác định bởi $u_n = 2^n.\underbrace{\sqrt{2 - \sqrt{2 + ... + \sqrt{2}}}}_{n\,dau\,can}$ .Tính limu_n

HD: Từ bài 3 suy ra $u_n = 2^n.\sqrt{2 - \cos\frac{\pi}{2^n}} = 2^{n+1}.\sin\frac{\pi}{2^{n+1}}$. Do đó lim$u_n = \pi$

II/ Kĩ thuật 2: Tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi bằng cách sử dụng nguyên lý kẹp

Cơ sở lí thuyết:

Cho 3 dãy số (u_n), (v_n), (w_n) thõa mãn các điều kiện $v_n \le u_n \le w_n, \forall n$ và $\lim v_n = \lim w_n = a$, khi đó $\lim u_n = a$. (Nguyên lí kẹp)

Kết hợp với việc sử dụng các bất đẳng thức để đánh giá và sử dụng nguyên lí kẹp, ta có thể tính được giới hạn của một số dãy số cho bởi hệ thức truy hồi. Sau đây là một số ví dụ

<u>Ví dụ 1</u>: (Bài 4.4 sách bài tập ĐS và GT11 NC, trang 133 NXBGD2007)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{4} \\ u_{n+1} = u_n^2 + \dfrac{u_n}{2}, \forall n \ge 1 \end{cases}$

a) CMR: $0 \le u_n \le \frac{1}{4}, \forall n$

b) CMR: $\frac{u_{n+1}}{u_n} \le \frac{3}{4}, \forall n$. Tính $\lim u_n$

<u>Giải</u>:

a) Bằng quy nạp dễ dàng chứng minh được $0 \le u_n, \forall n$. Ta CM $u_n \le \frac{1}{4}, \forall n$. Với n = 1 thì $u_1 = \frac{1}{4}$ đúng. Giả sử $u_k \le \frac{1}{4}, \forall k \ge 1$, ta chứng minh $u_{k+1} \le \frac{1}{4}$. Thật vậy, ta có $u_k \le \frac{1}{4} \Rightarrow u_k^2 \le \frac{1}{4}u_k$ và $\frac{3}{4}u_k \le \frac{3}{4}.\frac{1}{4} = \frac{3}{16}$. Do đó $u_{k+1} \le \frac{1}{4}u_k + \frac{1}{2}u_k = \frac{3}{4}u_k \le \frac{3}{16} < \frac{1}{4}$

Vậy $0 \le u_n \le \frac{1}{4}, \forall n$

b) Từ câu a) suy ra $\frac{u_{n+1}}{u_n} = u_n + \frac{1}{2} \le \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}, \forall n$

Do đó ta có $0 < u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}.\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}......\frac{u_2}{u_1}.u_1 \le \frac{3}{4}.\frac{3}{4}.....\frac{3}{4}.u_1 = \frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}, \forall n$

Mà $\lim\frac{1}{4}.\left(\frac{3}{4}\right)^{n-1}$ =0, nên theo nguyên lí kẹp thì $\lim u_n = 0$

Nhận xét: Với ví dụ này, việc xác định CTTQ của dãy (u_n) như trong kĩ thuật 1 đã trình bày gặp nhiều khó khăn, nhưng nếu sử dụng bất đẳng thức để đánh giá và nguyên lí kẹp thì bài toán được giải quyết rất đơn giản.

Ví dụ 2: (Bài 4.5 sách bài tập ĐS và GT11 NC, trang 134 NXBGD2007)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \frac{1}{2} \\ u_{n+1} = \frac{u_n}{n+1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) CMR: $u_n > 0$ và $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \frac{1}{2}, \forall n$

b) Tính $\lim u_n$

Giải:

Nhận xét: Việc xác định CTTQ của dãy (u_n) rất khó khăn, nhưng từ hệ thức truy hồi ta thấy có thể đánh giá tỉ số $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ dễ dàng.

a) Dễ dàng chứng minh bằng quy nạp được $u_n > 0, \forall n$

Từ hệ thức truy hồi ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{n+1} \leq \frac{1}{2}, \forall n \geq 1$

b) Từ câu a) ta có $0 < u_n = \frac{u_n}{u_{n-1}}.\frac{u_{n-1}}{u_{n-2}}.......\frac{u_2}{u_1}.u_1 \leq \frac{1}{2}.\frac{1}{2}.....\frac{1}{2}.\frac{1}{2} = \left(\frac{1}{2}\right)^n, \forall n \geq 1$

Mà $\lim\left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$. Nên theo nguyên lí kẹp ta có $\lim u_n = 0$

Ví dụ 3: (Bài 4.11 sách bài tập ĐS và GT11 NC, trang 135 NXBGD2007)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 10 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$

Giải:

Nhận xét: Việc xác định CTTQ của dãy (u_n) thật không đơn giản, nhưng ta thấy rằng $u_n > 1$, với mọi n (kiểm tra bằng quy nạp). Hơn nữa theo bất đẳng thức Cosi, ta có $u_{n+1} = \sqrt{u_n} = \sqrt{1.u_n} \le \frac{1+u_n}{2}$.

Dấu "=" không xảy ra vì $u_n > 1, \forall n$, do đó $u_{n+1} < \frac{1+u_n}{2}, \forall n$

$$\Rightarrow u_{n+1} - 1 < \frac{u_n - 1}{2}, \forall n \ (*)$$

Áp dụng (*) liên tiếp nhiều lần ta có

$0 < u_n - 1 < \frac{u_{n-1}-1}{2} < \frac{u_{n-2}-1}{2^2} < .... < \frac{u_1 - 1}{2^{n-1}} = \frac{9}{2^{n-1}}, \forall n \ge 1,$

Hay $1 < u_n < 1 + \frac{9}{2^{n-1}}, \forall n \ge 1$

Mà $\lim(1 + \frac{9}{2^{n-1}}) = 1$ nên theo nguyên lí kẹp ta có $\lim u_n = 1$

Ví dụ 4: (Bài 4.74 trang 148 sách ĐS và GT 11 NC NXBGD 2007)

Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a \\ u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2 + 1}} - 1, \forall n \ge 1 \end{cases}$. (với – 1 < a < 0)

a) CMR $0 < u_{n+1} + 1 \le \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u_n + 1), \forall n \ge 1$

b) Tính $\lim u_n$

Giải:

Nhận xét rằng $-1 < u_n < 0$, với mọi n (kiểm tra bằng chứng minh quy nap). Từ đó suy ra $0 < u_n + 1 < 1$ và $\sqrt{u_n^2 + 1} > 1$

Suy ra $u_{n+1} = \frac{u_n + 1}{\sqrt{u_n^2+1}} - 1 < (u_n + 1) - 1 = u_n, \forall n \ge 1$, nên Dãy (u_n) là dãy giảm

Do đó $-1 < u_n \le u_{n-1} \le .... \le u_1 = a < 0, \forall n \ge 1$

$$\Rightarrow {u_n}^2 \geq a^2 \Rightarrow \sqrt{{u_n}^2+1} \geq \sqrt{a^2+1} \Rightarrow \frac{1}{\sqrt{{u_n}^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}$$

Nên $0 < u_{n+1}+1 = \frac{u_n+1}{\sqrt{{u_n}^2+1}} \leq \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u_n+1), \forall n \geq 1$

$$\Rightarrow 0 < u_n + 1 \leq \frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(u_{n-1}+1) \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^2 (u_{n-2}+1)$$

$$\leq .... \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^{n-1} (u_1+1), \forall n \geq 1$$

Hay $-1 < u_n \leq \left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^{n-1}.(a+1)-1, \forall n \geq 1$

Vì $0 < \frac{1}{\sqrt{a^2+1}} < 1 \Rightarrow \lim\left[(a+1)\left(\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}\right)^{n-1} - 1\right] = -1$.

Do đó theo nguyên lí kẹp ta được $\lim u_n = -1$

* ***Bài tập tham khảo***

Bài 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n + \frac{1}{2^n}}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) CMR $u_{n+1} - u_n < \frac{1}{2^{n+1}}, \forall n \geq 1$

b) Tính $\lim u_n$

(Đề thi HSG lớp 11 cấp tỉnh tỉnh Hà Tĩnh năm học 2009 – 2010)

Bài 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_n > 0 \\ {u_n}^2 \leq u_n - u_{n+1}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) CMR $u_n < \frac{1}{n}, \forall n \geq 1$

b) Tính $\lim u_n$

(Đề thi HSG cấp tỉnh lớp 12 tỉnh Quảng Ngãi năm học 2007 – 2008)

<u>Bài 3</u>: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_0 = \dfrac{1}{2} \\ u_{k+1} = u_k + \dfrac{1}{n} u_k{}^2, \forall k = \overline{0, n-1} \end{cases}$

a) CMR $1 - \dfrac{1}{n} < u_n < 1$

b) Tính $\lim u_n$

(Đề thi HSG cấp tỉnh lớp 12 tỉnh Quảng Ngãi năm học 2006 – 2007)

III/ Kĩ thuật 3: Tính giới hạn của dãy cho bởi hệ thức truy hồi bằng cách sử dụng tính đơn điệu và bị chặn

*** *Cơ sở lí thuyết*:**

- Trong sách giáo khoa Đại số và Giải tích 11 nâng cao, trang 154 có nêu định lí 4 như sau:

" a) Dãy số tăng và bị chặn trên thì có giới hạn hữu hạn

b) Dãy số giảm và bị chặn dưới thì có giới hạn hữu hạn"

- Nếu dãy số (u_n) thõa mãn điều kiện $u_n \le M, \forall n$ và tồn tại giới hạn $\lim u_n$ thì $\lim u_n \le M$; nếu dãy số (u_n) thõa mãn điều kiện $u_n \ge m, \forall n$ và tồn tại giới hạn $\lim u_n$ thì $\lim u_n \ge m$

- Giả sử dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn thì $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$

Áp dụng các tính chất trên, ta có thể tính được giới hạn của các dãy cho bởi hệ thức truy hồi. Dạng bài tập này khá phổ biến trong các đề thi HSG cấp tỉnh, các đề thi Olympic 30/4, các đề thi HSG cấp Quốc gia và Quốc tế. Phương pháp này tỏ ra rất hiệu quả khi giải quyết các bài toán tìm giới hạn của dãy số cho bởi hệ thức truy hồi. Sau đây ta xét một số ví dụ minh họa.

Ví dụ 1: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{2} \\ u_{n+1} = \sqrt{2 + u_n}, \forall n \ge 1 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$

Giải:

Trước hết ta sẽ chứng minh dãy số (u_n) tăng và bị chặn trên.

Chứng minh dãy (u_n) tăng bằng quy nạp, tức là $u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 1$

Khi n = 1 ta có $u_2 = \sqrt{2 + u_1} = \sqrt{2 + \sqrt{2}} > \sqrt{2} = u_1$

Giả sử $u_{k+1} > u_k$, khi đó $u_{k+2} = \sqrt{2+u_{k+1}} > \sqrt{2+u_k} = u_{k+1}$. Vậy $u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 1$

Nên (u_n) bị chặn dưới bởi $\sqrt{2}$. Ta sẽ chứng minh dãy (u_n) bị chặn trên bởi 2 bằng quy nạp, thật vậy

Khi n = 1 ta có $u_1 = \sqrt{2} < 2$

Giả sử $u_k < 2, \forall k \ge 1$, khi đó $u_{k+1} = \sqrt{2+u_k} < \sqrt{2+2} = 2$.

Vậy dãy số (u_n) bị chặn trên bởi 2. Do đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn, giả sử $\lim u_n = a$, thì $a \ge \sqrt{2}$.

Từ hệ thức truy hồi, lấy giới hạn hai vế ta có $\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{2+u_n}$

Hay $a = \sqrt{2+a} \Leftrightarrow a^2 = a+2 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a=-1 \\ a=2 \end{array}\right.$

Vì $a \ge \sqrt{2}$ nên a = 2. Vậy $\lim u_n = 2$

Nhận xét: Với ví dụ này, ta có thể tìm được CTTQ của dãy (u_n) là $u_n = 2\cos\frac{\pi}{2^{n+1}}, \forall n \ge 1$, tuy nhiên việc xác định CTTQ của (u_n) không phải là đơn giản và mất nhiều thời gian. Với kĩ thuật tính giới hạn như bài giải trên, bài toán được giải quyết gọn nhẹ.

Ví dụ 2: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = u_2 = 1 \\ u_{n+1} = \sqrt{u_n} + \sqrt{u_{n-1}}, \forall n \ge 2 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$

Giải:

Nhận xét: Ta thấy $u_1 = u_2 = 1$, $u_3 = 1+1 = 2 > u_2$; $u_4 = \sqrt{u_3} + \sqrt{u_2} = \sqrt{2} + 1 > u_3$.

Dự đoán dãy số (u_n) là dãy dương và tăng.

Ta chứng minh bằng quy nạp, tức là $u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 2$

Rõ ràng $u_n > 0, \forall n \ge 1$. Khi n = 2 ta có $u_3 = 2 > u_2 = 1$

Giả sử $u_{k+1} > u_k, \forall k \ge 2$. Ta có $u_{k+2} = \sqrt{u_{k+1}} + \sqrt{u_k} > \sqrt{u_k} + \sqrt{u_{k-1}} = u_{k+1}, \forall k \ge 2$

Nên dãy (u_n) là dãy số dương tăng $\Rightarrow u_n \geq u_1 = 1, \forall n \geq 1$

Hơn nữa, ta thấy $\forall n \geq 3, u_n = \sqrt{u_{n-1}} + \sqrt{u_{n-2}} < \sqrt{u_n} + \sqrt{u_n} = 2\sqrt{u_n}$

Hay $u_n^2 < 4u_n \Rightarrow u_n < 4 (do\ u_n > 0)$. Nên ($u_n$) bị chặn trên bởi 4

Do đó dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Giả sử limu_n = a, khi đó $a \geq 1$

Từ hệ thức truy hồi suy ra $\lim u_{n+1} = \lim\sqrt{u_n} + \lim\sqrt{u_{n-1}}$

Hay $a = \sqrt{a} + \sqrt{a} \Rightarrow a^2 = 4a$. Do $a \geq 1 > 0$ nên a = 4

Vậy $\lim u_n = 4$.

Ví dụ 3: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2010 \\ u_n^2 - 2u_n.u_{n+1} + 2011 = 0, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy (u_n) có giới hạn và tính giới hạn đó.

(Đề thi HSG cấp tỉnh khối 12 tỉnh Quảng Ngãi năm học 2010 – 2011)

Giải:

Trước hết ta nhận xét rằng $u_n > 0$, với mọi n,

Thật vậy, ta có u_1 = 2010 >0. Giả sử $u_k > 0, \forall k \geq 1$, ta chứng minh $u_{k+1} > 0$

Từ hệ thức truy hồi suy ra $2u_k.u_{k+1} = u_k^2 + 2011 > 0 \Rightarrow u_{k+1} = \dfrac{u_k^2 + 2011}{2u_k} > 0$

Do đó ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + 2011}{2u_n} = \dfrac{1}{2}(u_n + \dfrac{2011}{u_n})$. Theo bất đẳng thức Cosi, ta có

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2 + 2011}{2u_n} \geq \sqrt{u_n.\frac{2011}{u_n}} = \sqrt{2011}, \forall n \geq 1.$$

Mặt khác ta có $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{u_n^2 + 2011}{2u_n^2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{2011}{2u_n^2} \leq \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 1$

(vì $u_n \geq \sqrt{2011}, \forall n \geq 1 \Rightarrow \dfrac{2011}{2u_n^2} \leq \dfrac{2011}{2.2011} = \dfrac{1}{2}$)

Nên (u_n) là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi $\sqrt{2011}$, do đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn. Giả sử limu_n = a, khi đó $0 < a \leq 2010$

Và ta có $u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2} + 2011}{2u_n} \Rightarrow \lim u_{n+1} = \lim \dfrac{u_n^{\ 2} + 2011}{2u_n} \Rightarrow a = \dfrac{a^2 + 2011}{2a}$

$\Rightarrow a^2 = 2011 \Rightarrow a = \sqrt{2011}$. Vậy $\lim u_n = \sqrt{2011}$

<u>Ví dụ 4</u>: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \sqrt{30} \\ u_{n+1} = \sqrt{30u_n^{\ 2} + 3u_n + 2011}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n}$

(Đề thi HSG cấp tỉnh khối 11 tỉnh Quảng Bình năm 2010 – 2011)

<u>Giải:</u>

Nhận xét rằng $u_n > 0, \forall n$ (kiểm tra bằng chứng minh quy nạp)

Hơn nữa, ta có $u_{n+1} = \sqrt{30u_n^{\ 2} + 3u_n + 2011} > \sqrt{30u_n^{\ 2}} > \sqrt{u_n^{\ 2}} = u_n, \forall n \geq 1$

Nên dãy số (u_n) là dãy tăng. Giả sử dãy (u_n) bị chặn trên, khi đó (u_n) có giới hạn hữu hạn và ta đặt $\lim u_n$ = a (a > 0)

Ta có $\lim u_{n+1} = \lim \sqrt{30u_n^{\ 2} + 3u_n + 2011} \Rightarrow a = \sqrt{30a^2 + 3a + 2011}$

$\Rightarrow a^2 = 30a^2 + 3a + 2011 \Rightarrow 29a^2 + 3a + 2011 = 0$. Phương trình này vô nghiệm nên dẫn đến mâu thuẫn. Vậy dãy (u_n) không bị chặn hay $\lim u_n = +\infty$

Mặt khác $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{\dfrac{30u_n^{\ 2} + 3u_n + 2011}{u_n^{\ 2}}} = \sqrt{30 + \dfrac{3}{u_n} + \dfrac{2011}{u_n^{\ 2}}}$

Do đó $\lim \dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \sqrt{30 + \lim \dfrac{3}{u_n} + \lim \dfrac{2011}{u_n^{\ 2}}} = \sqrt{30}$

<u>Ví dụ 5</u>:Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^{\ 2}}{2010} + u_n, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim (\dfrac{u_1}{u_2} + \dfrac{u_1}{u_2} + ... + \dfrac{u_n}{u_{n+1}})$

(Đề thi HSG cấp tỉnh khối 12 tỉnh Quảng Bình năm 2010 – 2011)

Giải:

Từ hệ thức truy hồi ta có $u_{n+1} - u_n = \frac{u_n^2}{2010} > 0, \forall n \geq 1 (*) \quad \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \geq 1$,

do đó dãy (u_n) là dãy số tăng $\Rightarrow u_n > u_1 = 1 > 0, \forall n \geq 1$

Từ (*) suy ra $2010.\frac{u_{n+1} - u_n}{u_{n+1}.u_n} = \frac{u_n^2}{u_{n+1}.u_n}$ hay $\frac{u_n}{u_{n+1}} = 2010(\frac{1}{u_n} - \frac{1}{u_{n+1}})$

$$\Rightarrow \frac{u_1}{u_2} + \frac{u_1}{u_2} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}} = 2010(\frac{1}{u_1} - \frac{1}{u_{n+1}}) = 2010(1 - \frac{1}{u_{n+1}})$$

Do đó $\lim(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_1}{u_2} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}) = \lim 2010.(1 - \frac{1}{u_{n+1}})$

Giả sử (u_n) bị chặn trên, khi đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn, giả sử $\lim u_n = a$ (Vì $u_n > 1, \forall n \geq 1 \Rightarrow a \geq 1$).

Từ hệ thức truy hồi suy ra $\lim u_{n+1} = \lim(\frac{u_n^2}{2010} + u_n)$

Hay $a = \frac{a^2}{2010} + a \Rightarrow a = 0$ (vô lý). Vậy (u_n) không bị chặn, tức là $\lim u_n = +\infty$

$\Rightarrow \lim u_{n+1} = +\infty$. Vây $\lim(\frac{u_1}{u_2} + \frac{u_1}{u_2} + ... + \frac{u_n}{u_{n+1}}) = 2010$

Ví dụ 6: Cho dãy số (u_n) thõa mãn $\begin{cases} 0 < u_n < 1 \\ u_{n+1}(1 - u_n) > \frac{1}{4}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

a) CMR dãy (u_n) là dãy số tăng

b) Tính $\lim u_n$

Giải:

a) Nhận xét rằng (u_n) là dãy bị chặn

Hơn nữa $0 < u_n < 1 \Rightarrow 1 - u_n > 0$ và $u_{n+1} > 0, \forall n$. Theo bất đẳng thức Cosi, ta có

$u_{n+1} + (1 - u_n) \geq 2.\sqrt{u_{n+1}.(1 - u_n)} > 2.\sqrt{\frac{1}{4}} = 1, \forall n \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n$. Do đó (u_n) là dãy số tăng

b) Từ câu a) và nhận xét trên suy ra dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim u_n = a$, thì $a \geq 0$. Do đó $\lim\left[u_{n+1}(1-u_n)\right] = \lim u_{n+1}.\lim(1-u_n) = a(1-a)$.

Mặt khác từ giả thiết suy ra, $\lim\left[u_{n+1}(1-u_n)\right] \geq \frac{1}{4} \Rightarrow a(1-a) \geq \frac{1}{4}$

$$\Leftrightarrow a^2 - a + \frac{1}{4} \leq 0 \Leftrightarrow (a-\frac{1}{2})^2 \leq 0 \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}$$

Vậy $\lim u_n = \frac{1}{2}$

<u>Ví dụ 7</u>: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}), \forall n \geq 1 \end{cases}$ (a > 0)

Tính $\lim u_n$

<u>Giải:</u>

Nhận xét rằng (u_n) bị chặn dưới bởi $\sqrt{a}$.

Thật vậy, theo bất đẳng thức Cosi ta có $u_2 = \frac{1}{2}(u_1 + \frac{a}{u_1}) \geq \sqrt{a}$.

Giả sử $u_k \geq \sqrt{a}, \forall k \geq 2$, ta chứng minh $u_{k+1} \geq \sqrt{a}$

Theo bất đẳng thức Cosi và giả thiết quy nạp ta có

$u_{k+1} = \frac{1}{2}(u_k + \frac{a}{u_k}) \geq \sqrt{u_k.\frac{a}{u_k}} = \sqrt{a}$. Do đó $u_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 2$, nên ($u_n$) bị chặn dưới bởi $\sqrt{a}$

Mặt khác, ta có $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2u_n^{\ 2}}$ mà $u_n \geq \sqrt{a}, \forall n \geq 2 \Rightarrow \frac{1}{2u_n^{\ 2}} \leq \frac{1}{2a}$

Do đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{2} + \frac{a}{2u_n^{\ 2}} \leq \frac{1}{2} + \frac{a}{2a} = 1 \Rightarrow u_{n+1} \leq u_n, \forall n \geq 1$ nên (u_n) là dãy giảm.

Vậy dãy số (u_n) có giới hạn hữu hạn. Giả sử $\lim u_n = \alpha$, khi đó $\alpha > 0$

Từ hệ thức truy hồi suy ra

$\lim u_{n+1} = \lim \frac{1}{2}(u_n + \frac{a}{u_n}) \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}(\alpha + \frac{a}{\alpha}) \Rightarrow \alpha = \sqrt{a}$ (Do $\alpha > 0$)

Vậy $\lim u_n = \sqrt{a}$

Ví dụ 8: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_0 > 0 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n}{1+u_n^2}, \forall n \ge 0 \end{cases}$. Tính $\lim u_n$

Giải:

Nhận xét rằng $u_n > 0$ với mọi n. Thật vậy, $u_0 > 0$ và $u_1 = \frac{u_0}{1+u_0^2} > 0$

Giả sử $u_k > 0, \forall k \Rightarrow u_{k+1} = \frac{u_k}{1+u_k^2} > 0$. Do đó $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{1}{1+u_n^2} < 1, \forall n$ (vì $u_n^2 > 0$)

$\Rightarrow u_{n+1} < u_n, \forall n \Rightarrow (u_n)$ là dãy số giảm và bị chặn dưới bởi 0 nên (u_n) có giới hạn hữu hạn. Đặt $\lim u_n = a$, khi đó từ hệ thức truy hồi suy ra

$\lim u_{n+1} = \lim \frac{u_n}{1+u_n^2} \Rightarrow a = \frac{a}{1+a^2} \Rightarrow a^3 + a = a \Rightarrow a = 0$. Vậy $\lim u_n = 0$

Ví dụ 9: Cho dãy số (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 1 \\ u_{n+1} = 1 + u_1.u_2....u_n, \forall n \ge 1 \end{cases}$.

Đặt $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{u_k}$. Tính $\lim S_n$

Giải:

Nhận xét: Dễ thấy $u_n > 1, \ \forall n \ge 1 \Rightarrow u_1.u_2.....u_{k-1} > 1$

Ta có $u_{n+1} - u_n = 1 + u_1.u_2.....u_n - u_n > 1 + u_n - u_n = 1 > 0 \Rightarrow u_{n+1} > u_n, \forall n \ge 1$, do đó (u_n) là dãy số tăng. Giả sử (u_n) là dãy bị chặn trên, khi đó dãy (u_n) có giới hạn hữu hạn, và ta đặt $\lim u_n = a$

Ta có $a = \lim u_{n+1} = \lim(1 + u_1.u_2......u_{n-1}.u_n) = 1 + \lim(u_1.u_2......u_{n-1}).\lim u_n$

Vì $\lim(u_1.u_2.....u_{n-1}) \ge 1 \Rightarrow a \ge 1 + 1.a$. Điều này vô lí. Vậy (u_n) không bị chặn trên tức là $\lim u_n = +\infty$

Mặt khác ta có, $u_{k+1} - 1 = u_1.u_2.....u_k = u_k(u_1.u_2.....u_{k-1} + 1 - 1) = u_k(u_k - 1)$

$$\Rightarrow \frac{1}{u_{k+1}-1} = \frac{1}{u_k(u_k-1)} = \frac{1}{u_k-1} - \frac{1}{u_k}, \forall k \ge 2$$

$$\Rightarrow S_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{u_k} = \frac{1}{u_1} + \frac{1}{u_2-1} - \frac{1}{u_{n+1}-1} = 2 - \frac{1}{u_{n+1}-1}$$

Do đó $\lim S_n = \lim(2 - \frac{1}{u_{n+1}-1}) = 2$

**** Bài tập tham khảo***

Bài 1: Cho dãy (u_n) thõa mãn các điều kiện $\begin{cases} u_n < 1 \\ u_{n+1}(1-u_n) > \frac{1}{2}, \forall n \ge 1 \end{cases}$.

Tính $\lim u_n$ (ĐS: $\lim u_n = \frac{1}{2}$)

Bài 2: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 > 0 \\ u_{n+1} = \frac{1}{3}(2u_n + \frac{a}{u_n^{\ 2}}), \forall n \ge 1 \end{cases}$ (Với a > 0)

Tính $\lim u_n$ (ĐS: $\lim u_n = \sqrt[3]{a}$)

Bài 3: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 3 \\ u_{n+1} = \frac{1}{2}u_n^{\ 2} - u_n + 2, \forall n \ge 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k}$ (ĐS: 1)

(Đề thi chọn HSG Quốc gia khối 12 tỉnh Quảng Bình năm 2009 – 2010)

Bài 4: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = u_n^{\ 2} - u_n + 1, \forall n \ge 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{u_k}$ *(Đề thi HSG cấp tỉnh tỉnh Quảng Ngãi năm 2004 - 2005)*

Bài 5: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} = \dfrac{\sqrt{u_n^2 + 4u_n} + u_n}{2}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Chứng minh rằng dãy $y_n = \lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$ có giới hạn hữu hạn và tính giới hạn đó

(VMO 2009) (ĐS:limy_n= 6)

Bài 6: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a > 1 \\ u_{n+1} = u_n^2, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{u_k}{u_{k+1} - 1}$

(Tạp chí THTT tháng 10/2010) ĐS: $\dfrac{1}{a}$

Bài 7: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = a > 1 \\ u_{n+1} = \dfrac{u_n^2 + u_n - 1}{u_n}, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2 - 1}$ *(Tạp chí THTT tháng 10/2010)*

Bài 8: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2009 \\ u_{n+1} = u_n(\sqrt{u_n} + 1)^2, \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{u_k} + 1}$

(Tạp chí THTT tháng 10/2010) (ĐS: $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{\sqrt{u_k} + 1} = \dfrac{1}{\sqrt{2009}}$)

Bài 9: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 2 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n^2 + 1), \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k + 1}$ *(Tạp chí THTT tháng 10/2010)*

Bài 10: Cho dãy (u_n) xác định bởi $\begin{cases} u_1 = 8 \\ u_{n+1} = \dfrac{1}{3}({u_n}^2 - 7u_n + 25), \forall n \geq 1 \end{cases}$

Tính $\lim\limits_{n \to +\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k - 2}$ *(Tạp chí THTT tháng 10/2010)*

PHẦN KẾT LUẬN

Sáng kiến kinh nghiệm này là kết quả của một quá trình tự tìm tòi, nghiên cứu, đúc kết và rút kinh nghiệm trong quá trình bồi dưỡng học sinh giỏi cấp trường và cấp tỉnh ở cả hai khối 11 và khối 12 trong năm học 2010 – 2011. Qua một năm triển khai thực hiện đề tài này, tôi thấy tính hiệu quả của đề tài rất cao, có thể áp dụng để dạy bồi dưỡng học sinh giỏi dự thi cấp tỉnh cho những năm tiếp theo. Trong năm học tới, tôi sẽ tiếp tục nghiên cứu và bổ sung để đề tài này được hoàn thiện hơn, đáp ứng được nhu cầu bồi dưỡng cho học sinh để dự thi học sinh giỏi cấp tỉnh đạt kết quả.

Tôi rất mong được hội đồng chuyên môn Nhà trường góp ý, bổ sung để đề tài này hoàn thiện hơn, và có thể triển khai áp dụng để dạy bồi dưỡng học sinh giỏi cho những năm tiếp theo trong Nhà trường đạt hiệu quả cao.

Trong quá trình biên soạn đề tài tôi đã có nhiều cố gắng, tuy nhiên cũng không tránh khỏi những thiếu sót. Rất mong nhận được sự góp ý chân thành của các thầy cô giáo đồng nghiệp và Hội đồng chuyên môn Nhà trường để đề tài của tôi được hoàn thiện hơn. Xin chân thành cảm ơn!

Quảng Ngãi tháng 05 năm 2011.

***Duyệt của Hội đồng chuyên môn nhà trường*:**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
...

***Duyệt của Hội đồng chuyên môn cấp trên*:**

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....
....